問1. 以下の文章それぞれについて，正しいと思うものに〇，誤りと思うものに×をつけよ．完全に自信がない場合でも，よりふさわしいと思う答を記入せよ（×の場合でも理由を書かなくてよい）．

(ア) 情報理論の父とよばれているのは，ジョン・フォン・ノイマンである．

(イ) 通信路符号化の目的は，通信の効率を高めることである．

(ウ) 確率変数Xのエントロピーが最大となるのは，Xの値がつねに1つの決まった値をとる場合である．

(エ) 情報源アルファベットの大きさ(元の数)が 2 である情報源を 2 元情報源と呼ぶ．

(オ) Xが 0,1,2 の3つの値のどれかをとるとき，$P(X=1)=p$とすれば，Xのエントロピー$H(X)$は，エントロピー関数$\mathcal{H}(x)$の$x=p$の値 $\mathcal{H}(p)$と等しい．

(カ) 確率変数 X のエントロピーとは，X の実現値を知ったときに得られる自己情報量の期待値である．

(キ) S_0, S_1, S_2の3状態からなるマルコフ情報源で，定常分布においてそれぞれの状態にいる確率をw_0, w_1, w_2，状態S_iから状態S_jへの遷移確率をp_{ij}とすれば，$p_{00}w_0+p_{01}w_1+p_{02}w_2=w_0$が常に成り立つ．

(ク) 3状態S_0, S_1, S_2からなるマルコフ情報源Sで，定常分布においてそれぞれの状態にいる確率をw_0, w_1, w_2，状態S_iから状態S_jへの遷移確率をp_{ij}とすれば，この情報源Sのエントロピー$H(S)$は$\sum_{i=0}^{2} w_i\left(-\sum_{j=0}^{2} p_{ij}\log_2 p_{ij}\right)$である．

(ケ) クラフトの不等式を満たす符号長であれば，うまく符号語を割り当てれば必ず一意復号可能な符号を作れる．

(コ) 無記憶定常情報源ではエントロピー$H(S)$と1次エントロピー$H_1(S)$が必ず一致する．

(サ) 情報源 S を1情報源記号毎に2元符号化する場合，コンパクト符号を用いれば1情報源記号あたりの平均符号長が1次エントロピー$H_1(S)$に一致する一意復号可能な符号を常に作ることができる．

(シ) 情報源 S に対しブロック2元符号化を行えば，1情報源記号あたりの平均符号長が1次エントロピー$H_1(S)$より小さい符号を作ることが可能な場合がある．

(ス) 誤り源を用いた加法的2元通信路モデルでは，定常情報源である誤り源からの各時刻における 1 の発生確率が通信路のビット誤り率となる．

(セ) ひずみを許す情報源符号化の場合，許す平均ひずみの上限を大きくすると 1 記号あたりの平均符号長の下限は小さくなる．

(ソ) 確率変数XとYの相互情報量が 0 となるのは，XとYが独立なときである．

(タ) 記憶のない定常2元通信路に記号 X を入力したとき記号 Y が出力される場合，この通信路を介して平均として$I(X;Y)$ビット/記号の情報が送られる．

(チ) 2 元通信路符号の場合，単位をビット/記号にとれば情報速度と効率は一致する．

(ツ) 通信路容量を超える情報速度でデータを送る場合でも，符号長が十分長い符号を用いれば復号誤り率をいくらでも小さくすることが可能である．

(テ) 出力に対して一様な記憶のない定常通信路において，入力記号を等確率で入力したとき出力記号が等確率で出力されない場合がある．

(ト) 2 元組織符号において，(9,4)符号の検査ビットの数は 4 ビットである．

(ナ) 符号の効率が 1 の場合には，誤り訂正や誤り検出を行うことはできない．

(ニ) ハミング符号は線形符号ではない．

(ヌ) 生成多項式が$G(x)=x^{16}+x^{12}+x^5+1$の巡回符号では，長さが 16 までの任意のバースト誤りをすべて検出できる．

(ネ) 線形符号では，最小ハミング距離と最小ハミング重みはかならず一致する．

(ノ) 最小ハミング距離が 7 の 2 元通信路符号では，すべての 3 重誤りまでを訂正でき，同時にすべての 4 重誤りの検出が可能である．

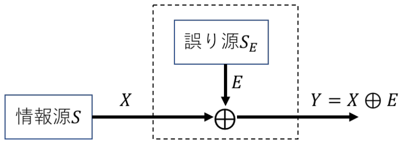
問2. A, B, C の 3 種類の情報源記号を，それぞれ 1/2, 1/3, 1/6 で発生する記憶のない定常情報源 S を考える．このとき以下の問いに答えよ．ただし、答えは小数点以下３桁を四捨五入し２桁まで求めよ．

(ア) この情報源 S から発生する情報源系列を，1 情報源記号毎に 2 元符号化するハフマン符号を求め，その平均符号長 L_1 を求めよ．

(イ) この情報源Sから発生する情報源系列を, 2 情報源記号毎に 2 元符号化するブロックハフマン符号を求め，その 1 情報源記号あたりの平均符号長L_2を求めよ．

(ウ) 一意復号可能な 2 元符号化における 1 情報源記号あたりの平均符号長の下限 L を求めよ. ただし、$\log_2 3 = 1.585$で計算せよ．

問3. 誤り源S_Eが確率1/4で1を出力する無記憶定常情報源で表される加法的2元通信路を考える. この通信路に, 右図のように確率pで 1 を出力する無記憶定常2元情報源Sを接続した通信に関し, 以下の問いに答えよ. ただし, エントロピー関数$\mathcal{H}(x)$の値として，$\mathcal{H}(1/4) = 0.811, \mathcal{H}(3/8) = 0.954$ を用いてもよい. 値は小数点以下3桁まで求めよ.



(ア) $p = 1/4$のとき，Yが 1 となる確率$P_Y(1)$を求めよ．また，このときのYのエントロピー$H(Y)$を求めよ．

(イ) $p = 1/2$のとき，Yが 1 となる確率$P_Y(1)$を求めよ．また，このときのYのエントロピー$H(Y)$を求めよ．

(ウ) Xで条件付けたYのエントロピー$H(Y|X)$を求めよ．

(エ) $p = 1/4$のとき，XとYの相互情報量$I(X;Y)$を求めよ．

(オ) この通信路の通信路容量Cを求めよ．

問4. 4 個の情報ビットx_1, x_2, x_3, x_4に対して，以下の式で定義される 3 個の検査ビットc_1, c_2, c_3を付加した$w = (x_1, x_2, x_3, x_4, c_1, c_2, c_3)$ という形の(7,4)ハミング符号を考える．このとき以下の問いに答えよ．ただし，式の中における足し算はすべて 2 の剰余系（$0 + 0 = 1 + 1 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1$）で考えるものとする．

$$\begin{cases} c_1 = x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 \\ c_2 = x_1 + x_2 + x_3 \\ c_3 = \phantom{x_1 + {}} x_2 + x_3 + x_4 \end{cases}$$

(ア) この符号の 1 記号あたりの情報速度と冗長度を求めよ．

(イ) この符号を用いて, 情報ビット0101 を符号化せよ.

(ウ) 長さ 7 の$\{0,1\}$−系列$w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 w_6 w_7$に対するこの符号のパリティ検査方程式を示せ.

(エ) ある符号語を送ったとき，系列 0110010 を受信したとする．単一誤りが生じていると想定して，送信語の情報ビットを推定せよ．

(オ) この符号は生成多項式が$G(x) = x^3 + x^2 + 1$の巡回符号であることが知られている．このことを利用して受信した系列 1110100 に誤りがあるか否か調べよ．計算の過程も記述すること．

(カ) この(7,4)ハミング符号に関し，(エ)のように誤り訂正まで行う場合と(オ)のような検出のみ行う場合のそれぞれの長所を，ハミング符号は最小距離が 3 であるという事実に基づいて説明せよ．