情報エレクトロニクス学科共通科目・2年次・夏ターム〔必修科目〕

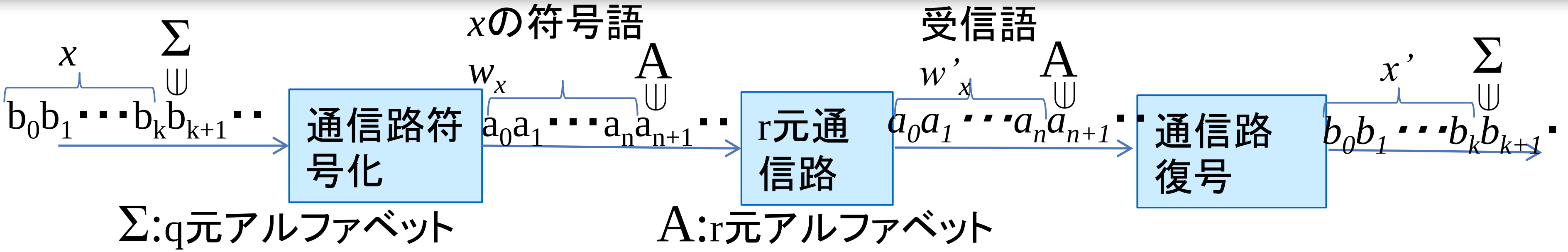
講義「情報理論」

第11回

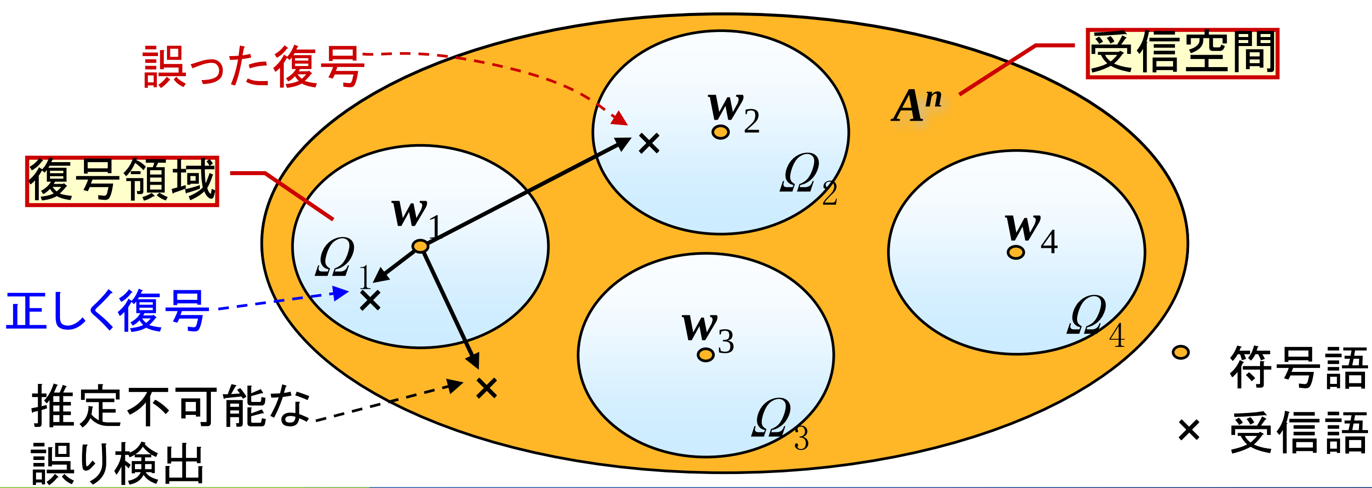
第7章 通信路符号化の限界(2)

通信路容量(後半)
通信路符号化定理
通信システム全体としての情報伝達の限界

[復習]通信路符号の基礎概念(1)



- 通信路符号化の目的: 信頼性の向上　そのために→冗長性を付加
- 長さkのブロック$x \in \Sigma^k$を長さnの符号語$w_x \in A^n$に符号化
- $q^k < r^n$: 符号語としてA^nの一部のみ使用 (冗長性の付加)
- **通信路符号**(または**符号**):A^n の中から選ばれた系列の集合 C



[復習]情報速度と冗長度

- 符号Cの情報(伝達)速度 R:

$$R = \frac{\log_2 M}{n} \quad (ビット／記号)$$

符号Cを用いればどのくらいの速さで(１記号あたり何ビットの)情報を伝達できるか

ただし Mは符号C(⊆A^n)に含まれる符号語の数

➢情報速度の最大値

$$R_{\max} = (\log_2 r^n) / n = \log_2 r$$

(A^n に含まれる r^n 個の系列すべてを符号語とした場合)

➢$R < R_{\max}$ とすることで、誤りの訂正や検出が可能となる。

- 情報速度Rの符号C の効率(符号化率) η :

$$\eta = R / R_{\max}$$

➢$0 \leqq \eta \leqq 1$

➢C の冗長度 ρ: $\rho = 1 - \eta$

式を入力

[復習]通信路容量の定義

通信路の通信路容量：

その通信路を介して、送ることができる1記号あたりの平均情報量の上限

[定義7.1]長さnの入力系列$\boldsymbol{X}_n$に対する通信路の出力系列$\boldsymbol{Y}_n$に対し

$$C = \lim_{n\to\infty} \max_{P_{\boldsymbol{X}_n}} \frac{I(\boldsymbol{X}_n; \boldsymbol{Y}_n)}{n}$$

で定義されるCを通信路容量(channel capacity)と呼ぶ.

通信路容量の単位はビット(ナット, ハートレー)あるいはビット/通信路記号

式を入力

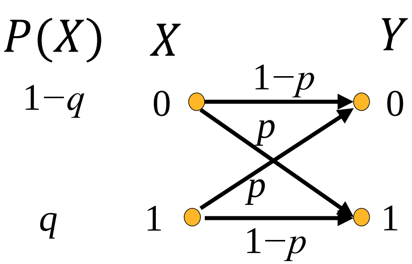
[復習]無記憶定常通信路の通信路容量

[定理7.1]入力記号Xに対し記号Yが出力される記憶のない通信路の通信路容量は

$$C = \max_{P_X} I(X;Y)$$

で計算できる.

[例]2元対称通信路の通信路容量



2元対称通信路の通信路線図

$$
\begin{aligned}
C &= \max_{P_X} I(X;Y) \\
&= \max_{q} I(X;Y) \\
&= \max_{q} (H(Y) - H(Y|X)) \\
&= \max_{q} \mathcal{H}(p + q - 2pq) - \mathcal{H}(p) \\
&= 1 - \mathcal{H}(p)
\end{aligned}
$$

ただし，$\mathcal{H}(p) = -p \log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$

記憶のない一様通信路の通信路容量

[定理7.2]各時刻にr元アルファベットに属する記号Xを入力し，s元アルファベットに属する記号Yを出力する，**入力について一様な**記憶のない定常通信路の通信路容量をCとする．この通信路の通信路行列の各行の要素の集合を$\{p_1, p_2, \cdots, p_s\}$とすれば

$$C = \max_{P_X} H(Y) + \sum_{i=1}^{s} p_i \log_2 p_i$$

が成り立つ．
通信路が**2重に一様**であれば、

$$C = \log_2 s + \sum_{i=1}^{s} p_i \log_2 p_i$$

が成り立つ．

記憶のない定常通信路が入力(出力)について一様
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 通信路行列のどの行(列)も同じ要素を並べ替えたものになっている
記憶のない定常通信路が2重に一様
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$通信路が入力について一様かつ出力について一様

記憶のない一様通信路の通信路容量の例

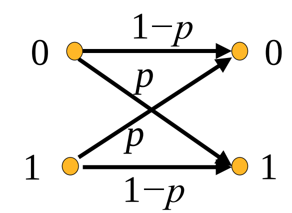
2元対称通信路

２重に一様な通信路

通信路行列: $\begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix}$

$s=2, p_1=1-p, p_2=p$として定理7.2を適用すると

$$C = \log_2 s + \sum_{i=1}^{s} p_i \log_2 p_i$$
$$= 1 + p\log_2 p + (1-p)\log_2(1-p) = 1 - \mathcal{H}(p)$$



２元対称通信路
の通信路線図

加法的2元通信路の通信路容量

[定理7.3] 誤り源S_Eにより定義される加法的2元通信路の通信路容量Cは

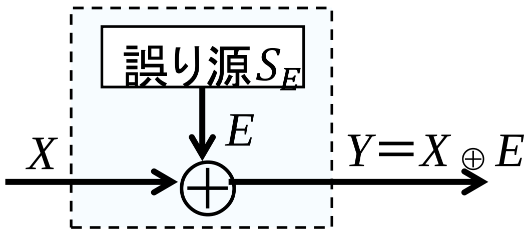
$$C = 1 - H(S_E)$$

である.

<u>誤り源S_Eにより定義される加法的2元通信路</u>

- 通信路内の誤り源S_Eが各時刻に$E \in \{0,1\}$を発生
- 通信路の各時刻の入力$X \in \{0,1\}$に対し出力$Y \in \{0,1\}$は$Y = X \oplus E$により定まる. ただし$\oplus$は排他的論理和.
- XとEは独立
- 誤り源S_Eが記憶のある定常情報源のとき加法的2元通信路は記憶のある定常通信路となる

加法的2元通信路



$E = 1$のとき
$X \neq X \oplus E = Y$となり
誤りが発生する.

定理7.3の証明

ここでは誤り源S_Eが無記憶定常情報源の場合を証明する．詳細は教科書p.126-127参照

各時刻の通信路への入力をX，出力を Y，誤り源の出力をE とすれば

XとYの相互情報量$I(X; Y)$は,

$$I(X; Y) = H(Y) - H(Y \mid X)$$
$$= H(Y) - H(X \oplus E \mid X)$$
$$= H(Y) - H(E)$$

$H(X \oplus E|X)$
$= P(X=0)H(E|X=0) + P(X=1)H(1 \oplus E|X=1)$
であるが、XとEは独立なので
$H(E|X=0) = H(E), H(1 \oplus E|X=1) = H(1 \oplus E)$
であり，さらに$P(1 \oplus E=0) = P(E=1)$であるから
$H(1 \oplus E) = H(E)$

と書ける。よって通信路容量 C を求めるには、入力X の確率分布に関し、$H(Y)$ を最大にすればよい。ところが、XとEが独立であるので$P_X(0) = P_X(1) = 1/2$ とすれば、***E* がどのようなものであっても**、$P_Y(0) = P_Y(1) = 1/2$ となる。このとき、$H(Y)$ はその最大値 1 をとる。したがって、通信路容量は

$$C = 1 - H(E)$$

となる。

$P_Y(0) = P_X(0)P_E(0) + P_X(1)P_E(1)$だから

[定理7.3の例1]誤り源が無記憶定常情報源の場合

誤り源S_Eが無記憶定常2元情報源の場合

このとき加法的2元通信路は2元対称通信路になる

$P(E=1)=p, P(E=0)=1-p$とすれば

$$H(S_E)=-p\log_2 p-(1-p)\log_2(1-p)=\mathcal{H}(p)$$

よって定理7.3より

$$C=1-H(S_E)=1-\mathcal{H}(p)$$

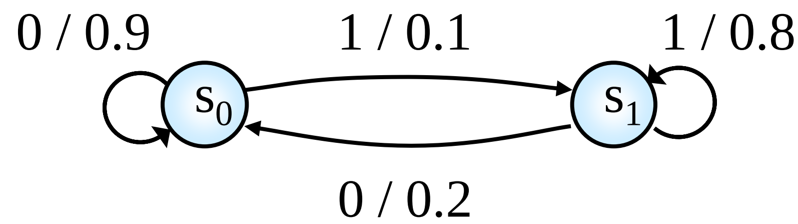
[定理7.3の例2]誤り源がマルコフ情報源の場合

誤り源S_Eが図のマルコフモデルで表される場合

定常分布において，状態S_0, S_1にいる確率をそれぞれw_0，w_1とする．

この誤り源S_Eのエントロピーは、

$$H(S_E) = w_0 H(E|S_0) + w_1\ H(E|S_1)$$
$$= w_0\ \mathcal{H}(0.1) + w_1\ \mathcal{H}(0.8)$$



誤り源のモデル

(w_0, w_1)は連立方程式

$$\begin{cases} 0.9w_0 + 0.2w_1 = w_0 \\ 0.1w_0 + 0.8w_1 = w_1 \\ \quad w_0 + w_1 = 1 \end{cases}$$

を満たすので(w_0, w_1)=(2/3,1/3)であり，

$\mathcal{H}(0.1)$=0.4690, $\mathcal{H}(0.8)$=0.7219であるから

$$H(S_E) = 2/3 \times 0.4690 + 1/3 \times 0.7219 = 0.5532$$

を得る。したがって、通信路容量Cは

$$C = 1 - 0.5532 = 0.4467 \quad \text{（ビット/記号）}$$

となる。

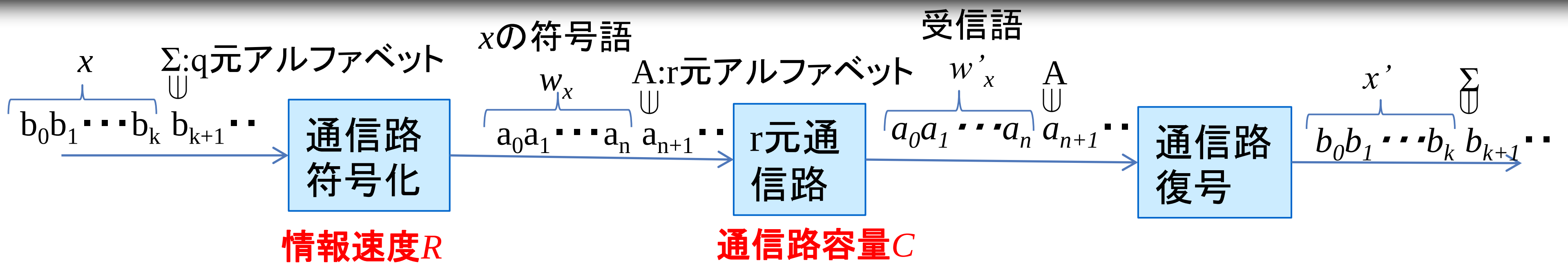
この通信路のビット誤り率$P(E=1)$は1/3 なので、S_E が同じビット誤り率の無記憶定常情報源の場合の通信路容量は

$$C = 1 - H(S_E) = 1 - \mathcal{H}(1/3)$$
$$= 0.0817 \text{（ビット/記号）}$$

であり、**同じビット誤り率であれば記憶がある方が大きい**ことが確認できる。

ちょっと休憩

通信路容量と情報速度の関係についての考察



情報速度$R \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

通信路符号系列に埋め込まれた1通信路記号あたりの平均情報量(ビット/記号)

通信路容量$C \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

通信路を介して伝送できる1通信路記号あたり平均情報量(ビット/記号)

情報速度R < 通信路容量C であれば

情報をすべて送ることができるのでは？

⇒復号誤り率を0にできるということ？

通信路符号化定理

定理 7.4 [通信路符号化定理(Shannonの第2符号化定理)]

通信路容量がCである通信路に対し、$R<C$であれば、情報速度Rの符号で復号誤り率がいくらでも小さいものが存在する。$R>C$であれば、そのような符号は存在しない。

[後半の証明] $R>C$であるとき、復号誤り率がいくらでも小さい符号が存在したとする。このとき、この通信路を介して1記号あたりR'($C<R'<R$)ビットの平均情報量の情報が伝送されることになる。これはこの通信路を介して伝送できる1記号あたりの平均情報量の上限がCビットであるということに矛盾する。

[前半の証明] 略。ランダム符号化(受信空間からの独立な無作為抽出をM(=2^{nR}(2元の場合))回繰り返すことによりM個の符号語を選択する符号化)によりできる符号の復号誤り率の期待値が、符号語長nを$n\to\infty$とすれば0に近づくことを示す。期待値が0に近づけば、期待値以下のものが必ず存在するので、復号誤り率がいくらでも小さい符号が存在する。

通信の

エントロピーが $H(S)$（ビット／情報源記号）情報源と
通信路容量は C（ビット／通信路記号）の通信路の通信システムは
全体としてどれだけ効率的に信頼性高く情報が伝送できるか？

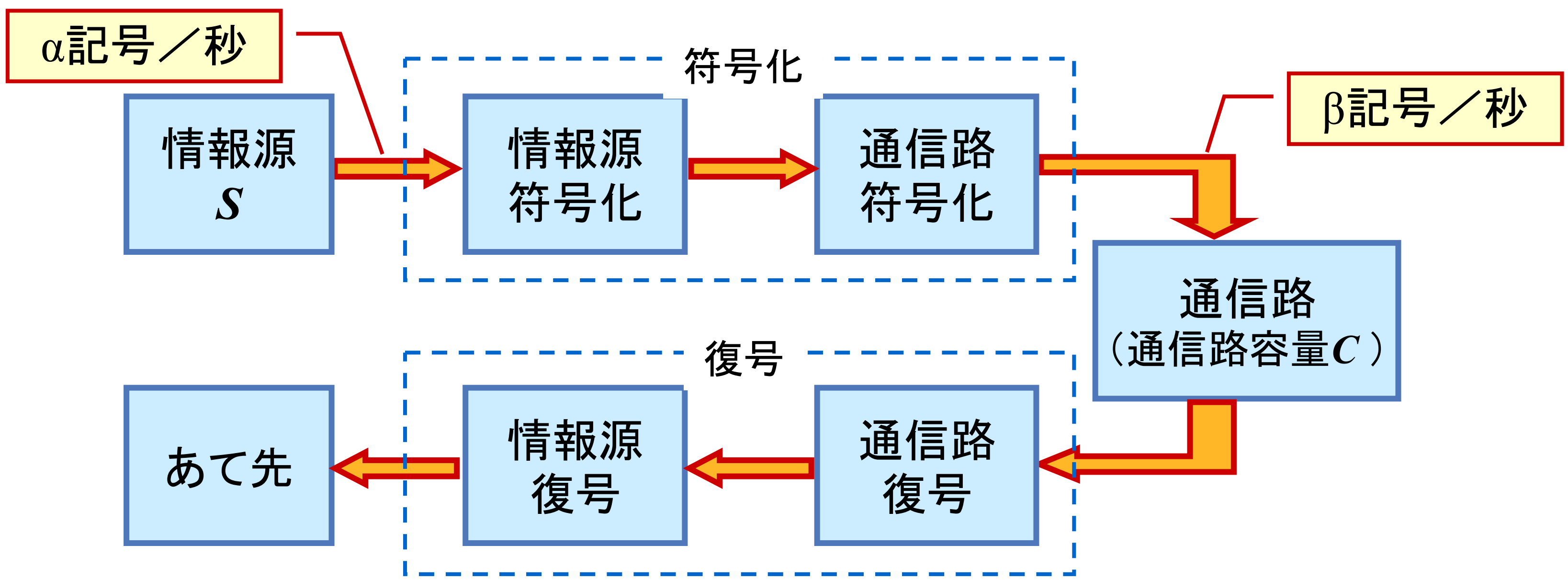


図: 通信システムのモデル

情報源から情報源記号が毎秒α個発生し、通信路では毎秒β個の通信路記号が伝送されているとする。

通信の限界(2)

- このとき、情報源からは

$$\mathcal{R}=\alpha H(S) \qquad \text{（ビット／秒）}$$

の速度で情報が発生する。また、通信路容量は秒あたり

$$\mathcal{C}=\beta C \qquad \text{（ビット／秒）}$$

となる。もし、

$$\mathcal{R} < \mathcal{C}$$

ならば、任意に小さい誤り率で情報をあて先まで送ることができる。しかし、

$$\mathcal{R} > \mathcal{C}$$

の場合は、ひずみが生じる。

- 情報源Sの速度・ひずみ関数を$R(D)$（ビット／情報源記号）とし、

$$\alpha R(D^*)=\mathcal{C}$$

を満たすD^*を考える。このとき任意の$\varepsilon>0$に対し

$$\alpha R(D^*+\varepsilon) < \alpha R(D^*)=\mathcal{C}$$

が成り立つ。

通信の限界(3)

- このとき通信路符号化定理より、情報速度$R(D^*+\varepsilon)$の符号でいくらでも復号誤り率が小さな符号が存在するので、$D^*+\varepsilon$にいくらでも近い平均ひずみで情報を送ることができる.
- これは、任意の$\varepsilon>0$について成り立つので、D^*にいくらでも近い平均ひずみで情報を送ることができる.

定理 7.6

情報速度$\mathcal{R}$（ビット／秒）で発生する情報を、通信路容量（$\mathcal{C}$ビット／秒）の通信路を介して送るとき、$\mathcal{R} < \mathcal{C}$であれば、任意に小さい誤り率で情報を伝送できる。

また、$\mathcal{R} > \mathcal{C}$ であれば、情報源の速度･ひずみ関数の値が$\mathcal{R}(D^*)=\mathcal{C}$(ビット/秒)を満たす D^* に対し、D^*に任意に近い平均ひずみで情報を伝送できるが、D^* より小さい平均ひずみでは伝送できない。

例題7.3(教科書p.132)

- 1, 0 を 0.2, 0.8 の確率で発生する記憶のない情報源から発生する系列を、ビット誤り率が0.1 の2元対称通信路を介して送るものとする。
  情報源は1秒に1記号を発生し、通信路も1秒に1記号を伝送する。
  (すなわち、α＝β＝1)
  このとき、
  $\mathcal{R}=\mathcal{H}(0.2)\fallingdotseq 0.7219$ (ビット／秒)
  $\mathcal{C}=1-\mathcal{H}(0.1)\fallingdotseq 0.5310$ (ビット／秒)
  となる。$\mathcal{R}>\mathcal{C}$ であるから、ひずみなしには情報を送れない。
- ひずみ測度としてビット誤り率を使うと、この情報源の速度・ひずみ関数は
  $$R(D)=\mathcal{H}(\mathrm{P_X}(1))-\mathcal{H}(D)=\mathcal{H}(0.2)-\mathcal{H}(D)\fallingdotseq 0.7219-\mathcal{H}(D) \text{ (ビット/秒)}$$
  であるから$R(D^*)=\mathcal{C}$ とすれば
  $$\mathcal{H}(D^*)\fallingdotseq 0.7219-0.5310=0.1909$$
  よって
  $$D^*=\mathcal{H}^{-1}(0.1909)=0.0293$$
  したがって復号誤り率の下限は0.0293である。

(教科書p.97【例5.8】)
$P_x(1)=p$である無記憶定常2元情報源においてビット誤り率をひずみ測度に用いた場合の速度・ひずみ関数$R(D)$は
$$R(D)=\mathcal{H}(p)-\mathcal{H}(D)$$
である。