北海道大学
Hokkaido University

情報エレクトロニクス学科共通科目・2年次・夏ターム〔必修科目〕

講義「情報理論」

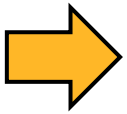
第14回

第8章 通信路符号化法(3)

8.3 巡回符号

巡回符号の特徴

- 組織符号・線形符号
- 符号化・シンドローム計算の装置化が容易
- 誤り検出能力に優れる



最も実用的な線形符号

巡回符号の定義

- **符号多項式：符号語の多項式表現**

0, 1 からなる長さn の符号語 $\boldsymbol{v}=(v_{n-1}, v_{n-2}, \cdots, v_1, v_0)$ を

$$V(x) = v_{n-1}x^{n-1}+v_{n-2}x^{n-2}+\cdots v_1 x+v_0$$

で表す。

係数は0か1しか取らない。
演算は常に mod 2 であること
に注意！

⇒符号長 n の符号は、$n-1$次以下の多項式の集合として表せる。

- **巡回符号(cyclic code)**

定数項が 1 の m (>0)次の多項式$G(x)= x^m+g_{m-1}x^{m-1}+\cdots g_1 x+1$の

$n-1$次以下の倍多項式すべての集合C

$g_1, \cdots, g_{m-1}$は0か1

($W(x)=A(x)G(x)$という形の符号多項式)

$A(x)$は$n-m-1$次以下の任意の多項式

巡回符号の例

$G(x)=x^4+x^3+x^2+1$によって作られる長さ7の符号C

符号多項式 $W(x)=w_6x^6+\cdots+w_1x+w_0$

及び符号語 $\boldsymbol{w}=(w_6,\cdots,w_1,w_0)$

$A(x)$	$W_1(x)=A_1(x)G(x)$	w
0	0	0000000
1	$x^4+x^3+x^2+1$	0011101
x	$x^5+x^4+x^3+x$	0111010
$x+1$	x^5+x^2+x+1	0100111
x^2	$x^6+x^5+x^4+x^2$	1110100
x^2+1	$x^6+x^5+x^3+1$	1101001
x^2+x	$x^6+x^3+x^2+x$	1001110
x^2+x+1	x^6+x^4+x+1	1010011

$A(x)=x^2+x+1$の場合の
$A(x)$ と $G(x)$ の乗算

係数のみの計算

$$\begin{array}{r} x^4+x^3+x^2+1 \\ \times)\quad x^2+x+1 \\ \hline x^4+x^3+x^2+1 \\ x^5+x^4+x^3+x \\ x^6+x^5+x^4+x^2 \\ \hline x^6+x^4+x+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11101 \\ \times)\quad 111 \\ \hline 11101 \\ 11101 \\ 11101 \\ \hline 1010011 \end{array}$$

項が偶数個だと消える

巡回符号**C**は$G(x)$ によって生成される

$\Rightarrow G(x)$:**C**の生成多項式（generator polynomial）

巡回符

- 線形符号となるための必要十分条件：任意の二つの符号語の和が符号語
- 巡回符号Cは線形符号

$W_1(x)$と$W_2(x)$はCの符号多項式

$\Rightarrow W_1(x)=A_1(x)G(x)$, $W_2(x)=A_2(x)G(x)$　と書ける

$\Rightarrow W_1(x)+W_2(x)=[A_1(x)+A_2(x)]G(x)$

$\Rightarrow W_1(x)+W_2(x)$はCの符号多項式

- 線形符号である⇒検査記号が情報記号の線形式でかける

⇒組織符号の形で符号語を作ることができる

- 情報ビット列が111の場合、対応する多項式$A(x)=x^2+x+1$に生成多項式$G(x)=x^4+x^3+x^2+1$をかけた多項式x^6+x^4+x+1に対応する系列は1010011であり先頭3ビットは111に一致しない⇒どうやって組織符号の形で求めるのか？

巡回符号の組織符号化法

- $n-m$ 個の情報ビット列 $x_{n-m-1}, \cdots, x_1, x_0$ をCの符号語に組織符号化する方法

①情報ビット列を係数とする多項式

$$X(x) = x_{n-m-1}x^{n-m-1} + \cdots + x_1 x + x_0$$

に x^m を掛け、それをm次の$G(x)$で割った剰余多項式

$$C(x) = c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

を計算。$C(x)$ は

$$X(x)\,x^m = A(x)G(x) + C(x) \quad \text{----------(1)}$$

となる $m-1$次以下の多項式。

[$A(x)$は商多項式であり、$n-m-1$次以下]

②式

$$W(x) = X(x)\,x^m - C(x) = X(x)\,x^m + C(x)$$

により$W(x)$を計算。

式(1)から $W(x)=A(x)G(x) \Rightarrow W(x)$ はCの符号多項式

$W(x)$のベクトル表現:

$$\boldsymbol{w} = (\underbrace{x_{n-m-1}, \cdots, x_1, x_0}_{\text{情報ビット}}, \underbrace{c_{m-1}, \cdots, c_1, c_0}_{\text{検査ビット}})$$

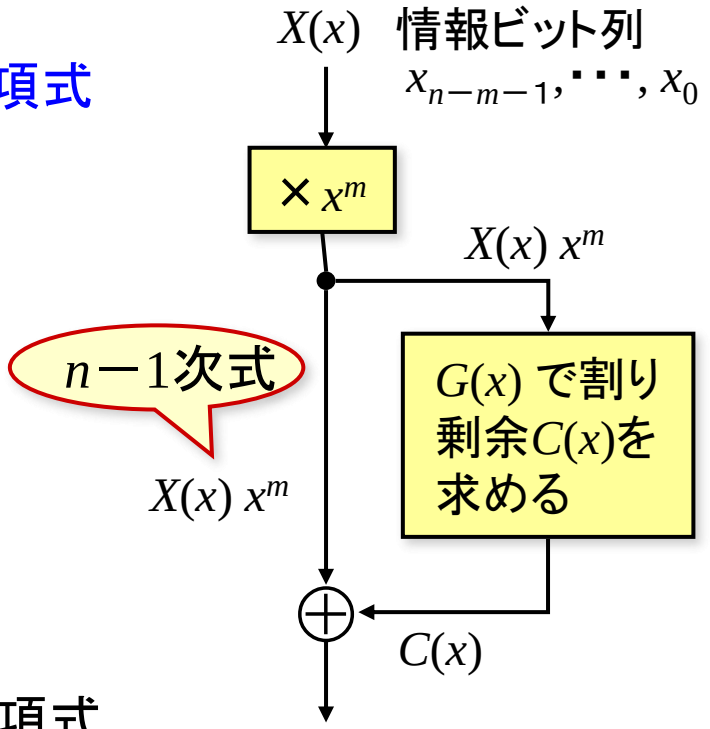


図 巡回符号の符号化

符号化の例

生成多項式: $G(x)=x^4+x^3+x^2+1$ 、

符号長: $n=7$

情報ビット数: $k=3$ （∵生成多項式は4(=m)次なので $n-m=3$）

情報ビット列 101 の符号化

情報ビットを係数とする多項式: $X(x)=x^2+1$

$x^{n-k}=x^4$ を掛ける: $X(x)\,x^4=x^6+x^4$

$G(x)$ で割った剰余: $C(x)=x+1$

符号多項式: $W(x)=X(x)\,x^4+C(x)=x^6+x^4+x+1$

符号語: 1010011

$$
\begin{array}{r}
 & & & & & & & x^2+x+1 \\
\hline
x^4+x^3+x^2+1 \;) & x^6 & & +x^4 & & & & \\
 & x^6+x^5+x^4 & & & +x^2 & & & \\
\hline
 & & x^5 & & +x^2 & & & \\
 & & x^5+x^4+x^3 & & & +x & & \\
\hline
 & & & x^4+x^3+x^2+x & & & & \\
 & & & x^4+x^3+x^2 & & +1 & & \\
\hline
 & & & & & x+1 & &
\end{array}
$$

係数のみの計算

$$
\begin{array}{r}
 & & & & & & & 111 \\
\hline
11101 \;) & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\
\hline
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & & & & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

なぜ「巡回」なのか？

符号長 n、生成多項式$G(x)$の巡回符号において、$G(x)$が x^n-1を割り切れば符号語$\boldsymbol{w}$の成分を巡回置換して得られる$\boldsymbol{w}'$も符号語となる.

$G(x)$が x^n-1を割り切れば

$W(x) = w_{n-1}x^{n-1}+\cdots+w_1x+w_0$ が符号多項式

$\Rightarrow W'(x) = w_{n-2}x^{n-1}+\cdots+w_0x+w_{n-1}$

$= xW(x) - w_{n-1}(x^n-1)$

という多項式もまた符号多項式

$\boldsymbol{w}=(w_{n-1}, w_{n-2}, w_{n-3}, \cdots, w_1, w_0)$

$\boldsymbol{w}'=(w_{n-2}, w_{n-3}, \cdots, w_1, w_0, w_{n-1})$

図 $\boldsymbol{w}$の成分の巡回置換

- 本来、長さ$\boldsymbol{n}$の巡回符号の生成多項式$G(x)$は x^n-1を割り切らなければならない。
  ⇒厳密には成立しないものを擬巡回符号（pseudo-cyclic code）と呼ぶ。
- $G(x)$ で生成される符号は、$G(x)$がx^n-1を割り切らなくても、ほとんど同様に扱えるため、ここでは擬巡回符号も含めて、単に巡回符号と呼ぶことにする。

$G(x)$の周期

- 多項式$G(x)$ の周期:

  $G(x)$がx^n-1を割り切る最小の正整数 n

- $G(x)$ で生成される巡回符号C の符号長 n は、通常、$G(x)$ の周期 p 以下に選ばれる。

  $n>p$ であると、

  x^p-1 は$n-1$次以下の多項式であり$G(x)$ で割り切れる

  $\Rightarrow x^p-1$ は Cの符号多項式

  $\Rightarrow$符号の最小ハミング距離が2以下

  （$\because x^p-1$に対応する符号のハミング重みは 2以下）

  $\Rightarrow$誤り訂正できない

ハミング重み＝ベクトル中の1の個数

【例】$G(x)=x^4+x^3+x^2+1$ を生成多項式とする長さ7 の巡回符号

$G(x)$ の周期は 7（$\because G(x)=x^4+x^3+x^2+1$ は、x^7-1を割り切るが、$x^\ell-1$（$\ell=1, 2, \cdots, 6$）は割り切らない）

本来の意味の巡回符号となっている。

巡回符号の最小距離

[定理] 周期pの生成多項式$G(x)$による符号長nの巡回符号の最小ハミング距離$d_{\min}$は，$n \leq p$であれば3以上である

$d_{\min}=1$と仮定

⇒巡回符号は線形符号であるのでハミング重みが1の符号語が存在

⇒ 符号多項式$W(x)=x^i$という形の符号語が存在

⇒G(x)がx^iを割り切る

⇒定数項が1の1次以上の多項式がx^iは割り切らないことに矛盾

⇒ $d_{\min}\neq 1$

$d_{\min}=2$と仮定

⇒$W(x)=x^i+x^j=x^j(x^{i-j}+1)$ $(0\leqq j<i<n)$

という形の符号多項式が存在（∵ハミング重み2の符号語が存在）

⇒ $W(x)$ は$G(x)$ で割り切れるから $x^{i-j}+1$は$G(x)$で割り切れる

⇒$G(x)$の周期は$i-j$以下

⇒$0<i-j<n\leqq p$ なので、$G(x)$の周期がp であることと矛盾 ⇒$d_{\min}\neq 2$

よって $d_{\min}\geqq 3$.

巡回符号の符号器のための割り算回路

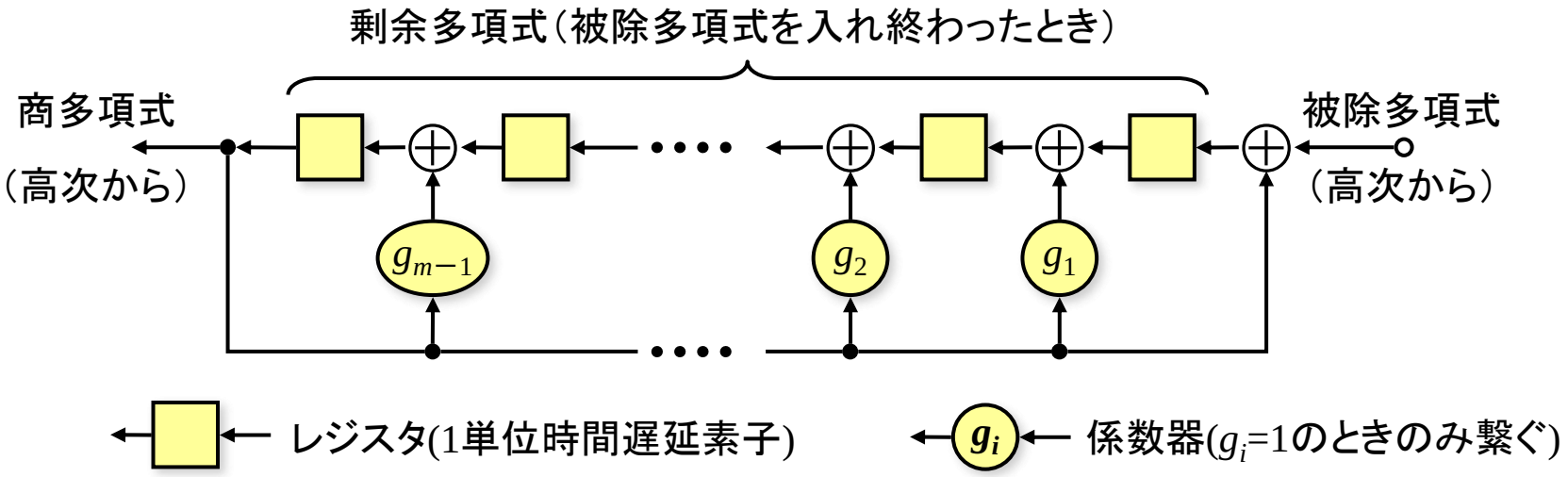


図 割り算回路

この回路で任意の多項式を$G(x)$で割った剰余多項式が求まるので、後は被除多項式と足し合わせるだけでよい

- 図は、生成多項式$G(x)$

$$G(x)= x^m+g_{m-1}x^{m-1}+\cdots g_1x+1$$

で割り算を行う回路である。

- このようなレジスタ(遅延素子)が直列に接続されている回路を、しばしば線形帰還シフトレジスタ回路と呼ぶ。この回路にクロックパルスを印加することにより、レジスタの値を左へ1ビットシフトすることができる。

割り算回路の動作例

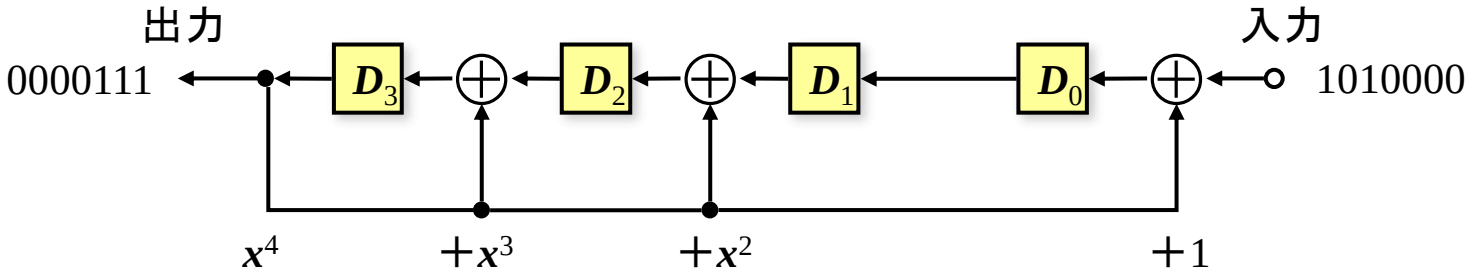


図 $x^4+x^3+x^2+1$ による割り算回路

- 図は、$G(x)=x^4+x^3+x^2+1$ で割り算を行う回路である。
- 表は、被除多項式が x^6+x^4 であるときのレジスタD_3, D_2, D_1, D_0 の状態の推移を示す。

(a)

$$
\begin{array}{r}
 & & & & & & x^2+x+1 \\
\hline
x^4+x^3+x^2+1 &) & x^6 & & +x^4 & & \\
 & & x^6+x^5+x^4 & & & +x^2 & \\
\hline
 & & & x^5 & & +x^2 & \\
 & & & x^5+x^4+x^3 & & +x & \\
\hline
 & & & & x^4+x^3+x^2+x & & \\
 & & & & x^4+x^3+x^2 & & +1 \\
\hline
 & & & & & & x+1
\end{array}
$$

(b)

$$
\begin{array}{r}
 & & & & & & 111 \\
\hline
11101 &) & 1010000 & & & & \\
 & & 11101 & & & & \\
\hline
 & & & 10010 & & & \\
 & & & 11101 & & & \\
\hline
 & & & & 11110 & & \\
 & & & & 11101 & & \\
\hline
 & & & & & & 0011
\end{array}
$$

表 割り算回路の動作

出力	状態 D_3	状態 D_2	状態 D_1	状態 D_0	入力
	0	0	0	0	
0					1
	0	0	0	1	
0					0
	0	0	1	0	
0					1
	0	1	0	1	
0					0
	1	0	1	0	
1					0
	1	0	0	1	
1					0
	1	1	1	1	
1					0
	0	0	1	1	

ちょっと休憩

巡回符号による誤りの検出

- 誤りの検出：受信語 **y** が符号語になるかどうかを調べる

  $n-1$次以下の多項式$Y(x)$が長さn,生成多項式$G(x)$の巡回符号の符号多項式

  $\Leftrightarrow Y(x)$が$G(x)$で割り切れる

- **巡回冗長検査**(cyclic redundancy check: CRC）方式

受信語 $\boldsymbol{y}=(y_{n-1},\cdots,y_1,y_0)$ を表す多項式

$Y(x)=y_{n-1}x^{n-1}+\cdots+y_1x+y_0$が$G(x)$で割り切れない $\Rightarrow$ 誤りがある

||

受信語を$G(x)$で割る割り算回路に読み込ませて、剰余が 0 にならない

- 巡回冗長検査方式には、**CCITT**（国際電信電話諮問委員会）でCRC-16-CCITTとして標準化された

$$G(x)=x^{16}+x^{12}+x^5+1$$

という生成多項式がよく用いられる。

CRC-16-CCITT($G(x)=x^{16}+x^{12}+x^5+1$)の特性 1

- $G(x)=x^{16}+x^{12}+x^5+1$ を因数分解すると、

$$G(x)=(x+1)(x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

となる。それぞれの因数は既約多項式（irreducible polynomial）。

- $G(x)$の周期：$p=32767$

異なる既約多項式の積の周期は、それぞれの周期の最小公倍数

$x+1$の周期：1

$x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^4+x^3+x^2+x+1$ の周期：$2^{15}-1=32767$

- $G(x)$を生成多項式とする符号の最小距離d_{min}：

符号長n：$n>p$だと$d_{min}\leqq 2$となる(p.9参照)ので$n\leqq p$とする

p.10の定理より、$d_{min}\geqq 3$

CRC-16-CCITT($G(x)=x^{16}+x^{12}+x^5+1$)の特性 2

- $G(x)$を生成多項式とする符号の最小距離$d_{\min}$（つづき）:
  符号語の重みは偶数
  ∵符号多項式$W(x)=w_{n-1}x^{n-1}+\cdots+w_1x+w_0$は
  $W(x)=(x^{16}+x^{12}+x^5+1)A(x)$と書ける
  $\Rightarrow W(1)=w_{n-1}+\cdots+w_1+w_0$
  $=(1^{16}+1^{12}+1^5+1)A(1)$
  $=0$
  ここが 0
  $\Rightarrow W(x)$は偶数個の項からなる
  以上から、$d_{\min}\geqq 4$ 。
  $A(x)=1$ の場合を考えよ
- 生成多項式$G(x)=x^{16}+x^{12}+x^5+1$ は、それ自身符号多項式
  $\Rightarrow$ハミング重み4の符号語が存在$\Rightarrow d_{\min}\leqq 4$
- この生成多項式で生成される符号長32767 以下の符号は$d_{\min}=4$であるので、
  3個以下の任意の誤りを検出できる。

CRC-16-CCITT($G(x)=x^{16}+x^{12}+x^5+1$)の特性 3

- 長さ16以下のバースト誤りの検出も可能

図のような長さ ℓ のバースト誤りパターンを多項式で表せば、

$$E(x)=x^i B(x)$$

となる。ここに、$B(x)$ は

$$B(x)=x^{\ell-1}+b_{\ell-2}x^{\ell-1}+\cdots+b_1x+1$$

という $\ell-1$次の多項式である。

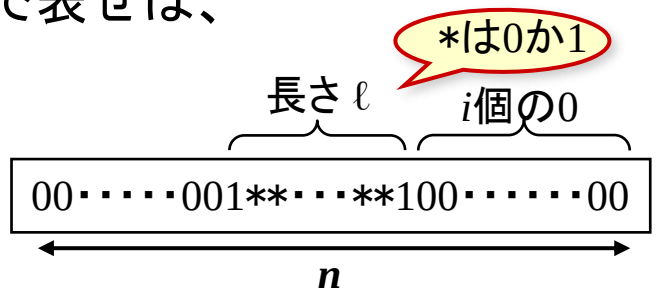


図　長さ ℓ のバースト誤りの誤りパターン

バースト誤り$E(x)$が巡回冗長検査方式で検出できる

⇔任意の符号語$W(x)$に対し$W(x)+E(x)$が符号語とはならない

⇔$E(x)$ が $G(x)$ で割り切れない

⇔$B(x)$ が $G(x)$で割り切れない（$\because G(x)$ は x を因数として含まない）

$G(x)=x^{16}+x^{12}+x^5+1$ の場合、次数は 16 であるので、

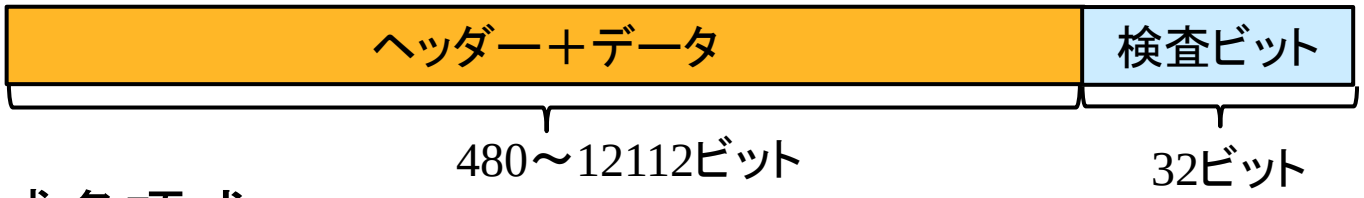
$B(x)$ が15次以下の多項式ならば$G(x)$で割り切れることはない

⇒長さ16以下の任意のバースト誤りは検出可能

長さ17以上のバースト誤りの大部分は検出可能であることがわかっている

イーサーネットの規格(IEEE 802.3)で使われているCRC方式

- イーサーネット(IEEE 802.3)のパケット構成



- 生成多項式

$$G(x)=x^{32}+x^{26}+x^{23}+x^{22}+x^{16}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^{8}+x^{7}+x^{5}+x^{4}+x^{2}+x+1$$

- 符号の最小距離=4 (パケット長の範囲内)
  ３重誤りまではすべて検出可能
- 長さ32までの連続区間内で発生した多重誤りを全て検出可能

巡回ハミング符号

- 0,1 を係数とする m次の多項式の周期$\leqq 2^m-1$
- 原始多項式（primitive polynomial）

  周期がちょうど2^m-1 となるm次の多項式

  各次数について原始多項式の存在することが証明されている。
- 巡回ハミング符号

  m次の原始多項式を生成多項式とする

  符号長 $n=2^m-1$ の符号

符号長：$n=2^m-1$

情報ビット数：$k=2^m-1-m$、

検査ビット数：m

最小距離：$d_{\min}=3$ ⇒単一誤り訂正符号

表 20次までの原始多項式の例

次数	原始多項式	次数	原始多項式
1	$x+1$	11	$x^{11}+x^2+1$
2	x^2+x+1	12	$x^{12}+x^6+x^4+x+1$
3	x^3+x+1	13	$x^{13}+x^4+x^3+x+1$
4	x^4+x+1	14	$x^{14}+x^{10}+x^6+x+1$
5	x^5+x^2+1	15	$x^{15}+x+1$
6	x^6+x+1	16	$x^{16}+x^{12}+x^3+x+1$
7	x^7+x+1	17	$x^{17}+x^3+1$
8	$x^8+x^4+x^3+x^2+1$	18	$x^{18}+x^7+1$
9	x^9+x^4+1	19	$x^{19}+x^5+x^2+x+1$
10	$x^{10}+x^3+1$	20	$x^{20}+x^3+1$

ハミング符号！

巡回ハミング符号の例

- $G(x)=x^3+x+1$を生成多項式とする長さ7の巡回ハミング符号
  この符号の検査行列を求める。
- $R_i(x):x^i\,(i=0,1,\cdots,6)$を$G(x)$で割った剰余多項式
  これを実際に計算すると表のようになる。
- $W(x)=w_6x^6+\cdots+w_1x+w_0$が$G(x)$で割り切れる
  $\Leftrightarrow w_i x^i$を$G(x)$で割った剰余多項式の和が0
  $\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{6} w_i R_i(x)=0$.
  この式の左辺をxの2, 1, 0次の項の係数ごとに書けば

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr} w_6+w_5+w_4 & & +w_2 & & & = 0 \\ & w_5+w_4+w_3 & & +w_1 & & = 0 \\ w_6+w_5 & & +w_3 & & +w_0 & = 0 \end{array}\right\}$$

  となる。この係数行列は

$$H=\begin{pmatrix} 1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&1&0&1&0 \\ 1&1&0&1&0&0&1 \end{pmatrix}$$

  Hは(7,4)ハミング符号の検査行列!

表 x^iを$G(x)=x^3+x+1$で割った剰余多項式$R_i(x)$

i	$R_i(x)$
0	1
1	x
2	x^2
3	$x+1$
4	x^2+x
5	x^2+x+1
6	x^2+1

多重誤り訂正が可能な巡回符号

- BCH符号(Bose-Chaudhuri-Hocquenghem code)

  符号長: $=2^m - 1$

  情報ビット数: $\geqq 2^m - 1 - m(d-1)$

  最小距離: $\geqq d$

- リード・ソロモン符号(Reed-Solomon code)

  q元BCH符号

  符号長: $=q - 1$

  情報ビット数: $=q - d$

  最小距離: $=d$

音楽CD, DVD, 2次元バーコード, QRコード, 衛星放送,
地上波デジタル放送等で利用されている！